模块一 立体图形的结构探究

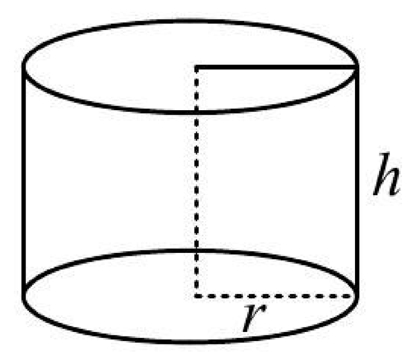
第 1 节 几何体的表面积与体积（★★）

强化训练

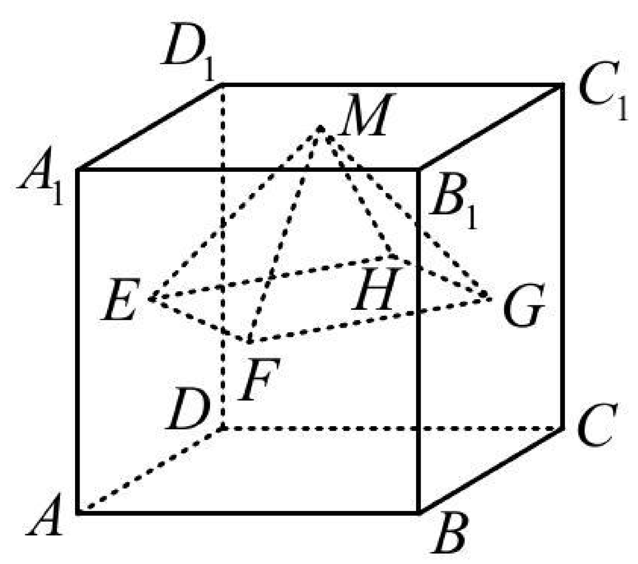
1．（2022 • 上海卷 • ★）已知圆柱的高为 4，底面积为9π，则圆柱的侧面积为_____.

答案：24π

解析：如图，由题意，$h=4$，底面积$S=\pi r^2=9\pi\Rightarrow r=3$，所以圆柱的侧面积为$2\pi rh=24\pi$.

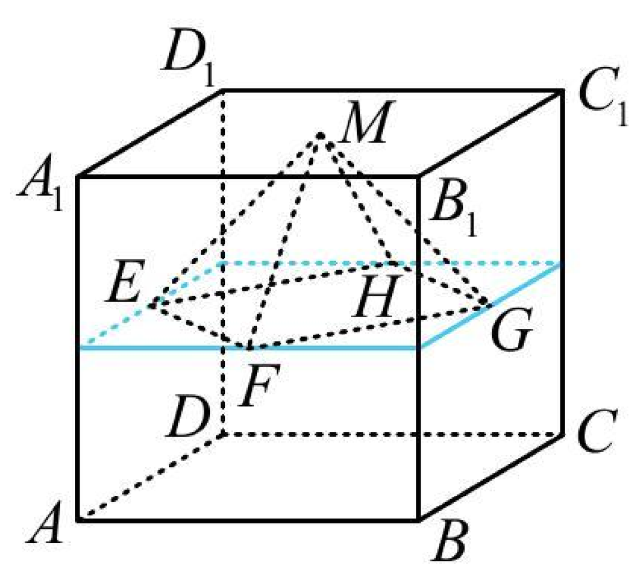


2．（2018 • 天津卷 • ★★）已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为 1，除面$ABCD$外，该正方体其余各面的中心分别为点E，F，G，H，M（如图），则四棱锥$M-EFGH$的体积为_____.



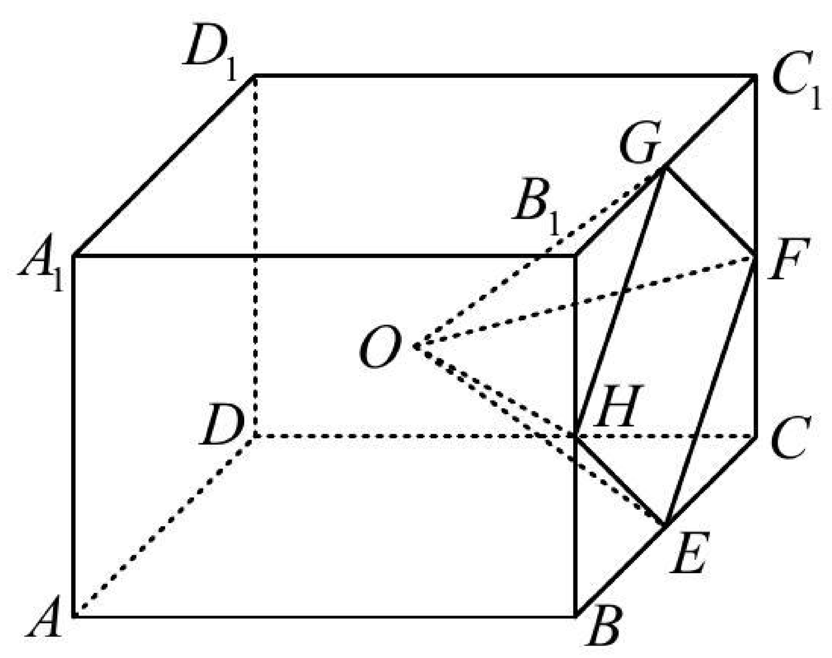
答案：$\dfrac{1}{12}$

解析：由题意，四棱锥$M-EFGH$的高为$\dfrac{1}{2}$，底面是由如图所示的蓝色正方形各边中点连线而成的正方形，其边长为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以$V_{M-EFGH}=\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{12}$.



3．（2019 • 新课标III卷 • ★★）学生到工厂劳动实践，利用 3D 打印技术制作模型，如图，该模型为长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$挖去四棱锥$O-EFGH$后所得的几何体，其中O为长方体的中心，E，F，G，H分别为所在棱的中点，$AB=BC=6\,\text{cm}$，$AA_1=4\,\text{cm}$，3D 打印所用的材料密度为$0.9\,\text{g/cm}^3$，不考虑打印损耗，

制作该模型所需原料的质量为_____g.



答案：118.8

解析：模型的体积等于长方体的体积减去四棱锥 $O-EFGH$ 的体积，先算四棱锥 $O-EFGH$ 的体积，

点 O 到平面 $EFGH$ 的距离为 3，即四棱锥的高为 3，

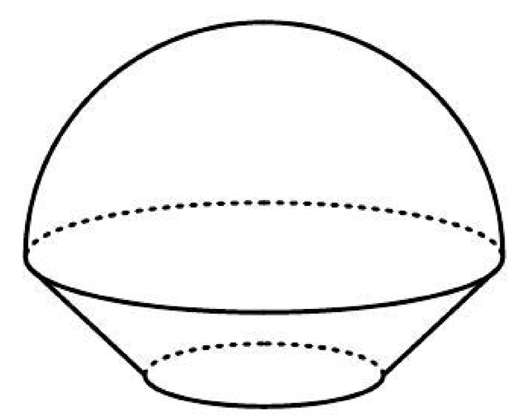
底面 $EFGH$ 是菱形，对角线长 $GE=AA_1=4$，$HF=BC=6$，所以底面积 $S=\frac{1}{2}\times4\times6=12$，

故四棱锥的体积为 $\frac{1}{3}\times12\times3=12$，所以模型的体积 $V=6\times6\times4-12=132\,\text{cm}^3$，

故其质量为 $132\times0.9=118.8\,\text{g}$.

4.（2023・福建莆田二模・★★）某校科技社利用 3D 打印技术制作实心模型，如图，该模型的上部分是半球，下部分是圆台，其中半球的体积为 $144\pi\,\text{cm}^3$，圆台的上底面半径及高均是下底面半径的一半，打印所用原料密度为 1.5g/cm^3，不考虑打印损耗，制作该模型所需原料的质量约为（　　）（$1.5\pi\approx4.7$）

（A）3045.6g　（B）1565.1g　（C）972.9g　（D）296.1g



答案：C

解析：半球的体积已知，可求得其半径，用于计算圆台的体积，先找到上、下底半径、高这些关键参数，

设半球的半径为 R，则 $\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi R^3=144\pi$，解得：$R=6$，

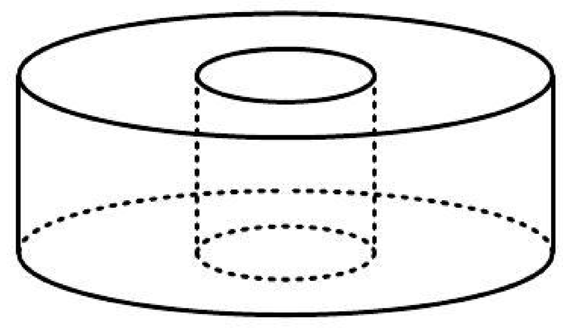
由题意，圆台的下底面半径为 6，高和上底面半径都为 3，所以圆台的体积

$V=\frac{1}{3}\times(\pi\times6^2+\pi\times3^2+\sqrt{\pi\times6^2\times\pi\times3^2})\times3=63\pi\,\text{cm}^3$，

故制作该模型所需原料的质量约为 $(63\pi+144\pi)\times1.5=207\times1.5\pi\approx207\times4.7=972.9\,\text{g}$.

5.（2023・湖北武汉模拟・★★）某车间需要对一个圆柱形工件进行加工，该工件底面半径为 15cm，高 10cm，加工方法为在底面中心处打一个半径为 $r$cm 的且和原工件有相同轴的圆柱形通孔，如图，若要求工件加工后的表面积最大，则 r 的值应设计为（　　）

（A）$\sqrt{10}$　（B）$\sqrt{15}$　（C）4　（D）5



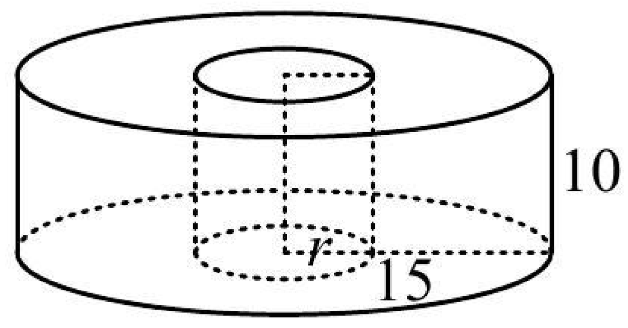
答案：D

解析：加工后的工件表面积由四部分组成：上下底面（大圆减小圆），大圆柱侧面，小圆柱侧面，

如图，加工后的表面积 $S=2(\pi\cdot15^2-\pi r^2)+2\pi\cdot15\times10+$

$2\pi r\cdot10=750\pi-2\pi r^2+20\pi r=750\pi-2\pi[(r-5)^2-25]$，

所以当 $r=5$ 时，S 取得最大值.



6．（2023·新高考Ⅱ卷·★★）底面边长为4的正四棱锥被平行于其底面的平面所截，截去一个底面边长为2，高为3的正四棱锥，所得棱台的体积为_____.

答案：28

解析：如图，由题意，棱台的上底面积 $S'=2\times2=4$，下底面积 $S=4\times4=16$，

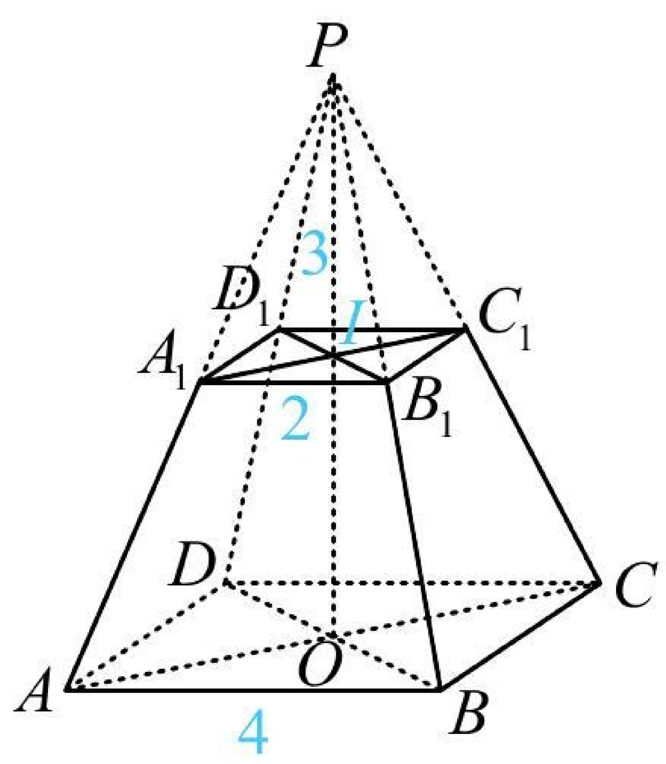
求体积还差高，已知截去的四棱锥的高，可由相似比来算棱台的高，

设 $A_1C_1\cap B_1D_1=I$，则由题意，$PI=3$，由图可知，

$\Delta PA_1I\backsim\Delta PAO$，所以 $\dfrac{PI}{PO}=\dfrac{A_1I}{AO}=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$，

从而 $PO=2PI=6$，故 $OI=3$，

所以四棱台的体积 $V=\dfrac{1}{3}(S+S'+\sqrt{SS'})\times OI=28$.



7．（2021·新高考Ⅱ卷改编·★★★）正四棱台的上、下底面的边长分别为2，4，侧棱长为2，则其体积为_____；侧面积为_____.

答案：$\dfrac{28\sqrt{2}}{3}$；$12\sqrt{3}$

解析：要算正四棱台的体积，还差高，已知侧棱长，可在包含侧棱的截面 BDD_1B_1 中来分析，

如图，作 $B_1E\perp BD$ 于 E，$D_1F\perp BD$ 于 F，则 B_1E，D_1F 均为正四棱台的高，

由题干所给数据可求得 $BD=4\sqrt{2}$， $B_1D_1=2\sqrt{2}$，所以 $EF=B_1D_1=2\sqrt{2}$， $BE=DF=\frac{1}{2}(BD-EF)=\sqrt{2}$，

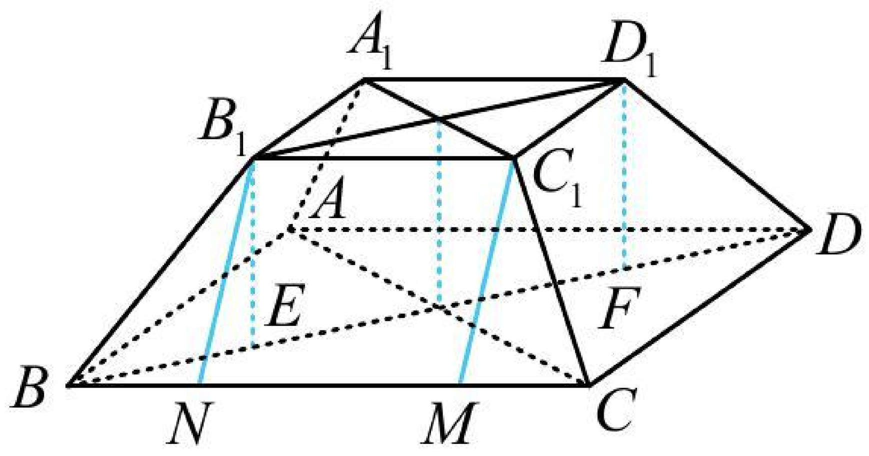
从而 $B_1E=\sqrt{BB_1^2-BE^2}=\sqrt{2}$，故正四棱台的体积 $V=\frac{1}{3}\times(2\times2+4\times4+\sqrt{2\times2\times4\times4})\times\sqrt{2}=\frac{28\sqrt{2}}{3}$；

再算侧面积，侧面为四个全等的等腰梯形，上底和下底已知，还差高，故先算高，

如图，作 $C_1M\perp BC$ 于 M， $B_1N\perp BC$ 于 N，则 $MN=B_1C_1=2$， $CM=BN=\frac{1}{2}(BC-MN)=1$，

$B_1N=\sqrt{BB_1^2-BN^2}=\sqrt{3}$，

所以等腰梯形 BCC_1B_1 的面积为 $\frac{1}{2}\times(2+4)\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}$，故四棱台的侧面积 $S=4\times3\sqrt{3}=12\sqrt{3}$.



8.（2022·天津模拟·★★★）两个圆锥的母线长相等，侧面展开图的圆心角之和为 2π，侧面积分别为 S_1 和 S_2，体积分别为 V_1 和 V_2，若 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3}{2}$，则 $\frac{V_1}{V_2}=$（　　）

（A）$\frac{3\sqrt{21}}{7}$　（B）$\frac{2\sqrt{21}}{7}$　（C）$\frac{9}{4}$　（D）$\frac{4\sqrt{21}}{21}$

答案：A

解析：两个圆锥及其侧面展开示意图如图，要研究体积之比，需分析关键参数（底面半径和高）的比值关系，

由题意，$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\pi r_1 l}{\pi r_2 l}=\frac{3}{2}$，所以 $\frac{r_1}{r_2}=\frac{3}{2}$，不妨设 $r_1=3m$， $r_2=2m$，

只需把两个圆锥的高也用 m 表示，就能算 $\frac{V_1}{V_2}$ 了，还有侧面展开图圆心角之和为 2π 这个条件没用，

设两个圆锥的侧面展开图的圆心角分别为 α，β，则 $\begin{cases}\alpha l=2\pi r_1\\ \beta l=2\pi r_2\end{cases}\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{2\pi r_1}{l}+\frac{2\pi r_2}{l}=2\pi\Rightarrow l=r_1+r_2=5m$，

所以 $h_1=\sqrt{l^2-r_1^2}=4m$， $h_2=\sqrt{l^2-r_2^2}=\sqrt{21}m$，故 $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{1}{3}\pi r_1^2h_1}{\frac{1}{3}\pi r_2^2h_2}=\frac{r_1^2h_1}{r_2^2h_2}=\frac{9m^2\cdot4m}{4m^2\cdot\sqrt{21}m}=\frac{3\sqrt{21}}{7}$.